Distribusi Probabilitas Weibull Dan Aplikasinya

(*Pada Persoalan Keandalan (Reliability) Dan Analisis Rawatan (Mantainability*)

Lian G. Otaya
Institut Agama Islam Negeri Sultan Amai Gorontalo

Abstrak

Distribusi Weibull adalah distribusi yang memiliki peranan yang penting terutama pada persoalan keandalan (reliability) dan analisis rawatan (mantainability). Distribusi Weibull sering dipakai sebagai pendekatan untuk mengetahui karakteristik fungsi kerusakan karena perubahan nilai akan mengakibatkan distribusi Weibull mempunyai sifat tertentu ataupun ekuivalen dengan distribusi tertentu. Distribusi ini adalah distribusi serbaguna yang dapat mengambil karakteristik dari jenis lain dari distribusi, berdasarkan nilai dari bentuk parameter. Oleh karenanya, Weibull menjadi sangat berguna terutama karena fleksibilitasnya mulai dari data yang sangat tidak simetris sampai data yang mendekati distribusi normal (simetris).

Kata Kunci: Distribusi, Probabilitas, Weibull, Aplikasi

A. Pendahuluan

Setiap peristiwa akan mempunyai peluang masing-masing, dan peluang terjadinya peristiwa tersebut akan mempunyai penyebaran yang mengikuti suatu pola tertentu yang disebut dengan distribusi probabilitas. Distribusi probabilitas adalah bagaimana nilai probabilitas didistribusikan pada data. Ada dua jenis distribusi sesuai dengan variabel acaknya yaitu distribusi peluang diskrit dan distribusi peluang kontinu.

Ada berbagai macam distribusi yang termasuk sebagai distribusi teoritis variabel acak diskrit dan kontinu. Yang termasuk pada distribusi teoritis variabel acak diskrit diantaranya adalah percobaan bernoulli, distribusi binomial, distribusi binomial negative (Pascal), distribusi geometris, distribusi hipergeometrik, dan distribusi poisson. Sedangkan yang termasuk pada distribusi teoritis variabel acak kontinu diantaranya adalah distribusi normal (Gaussian), distribusi gamma, distribusi eksponensial, distribusi chi-kuadrat, dan distribusi weibull.

Hal yang tidak dapat dipisahkan dari pengkajian distribusi adalah mengenai estimasi parameter. Teori estimasi sering dipakai sebagai prosedur untuk mencari parameter dari sebuah model yang paling cocok pada suatu data pengamatan yang ada. Dalam analisis keandalan atau reliabilitas, estimasi parameter digunakan untuk mencari parameter dari distribusi yang berkaitan dengan data yang dimiliki. Distribusi yang sering digunakan untuk menyelesaikan berbagai permasalahan mengenai reliabilitas ini adalah distribusi weibull.

Distribusi Weibull diperkenalkan oleh fisikawan swedia Waloddi Weibull pada tahun 1939. Distribusi weibull merupakan salah satu distribusi teoritis variabel acak kontinu yang sering digunakan untuk menganalisis suatu keandalan suatu item. Sama seperti distribusi gamma dan eksponensial yang menangani masalah keandalan, tetapi distribusi weibull yang paling sering digunakan.

Distribusi Weibull terkenal dengan distribusi yang fleksibel. Salah satu fleksibilitasnya dapat dilihat dari perubahan distribusi ini menjadi distribusi lainnya seperti distribusi eksponensial bergantung dengan perubahan parameter skala dan bentuknya. Sama halnya dengan distribusi probabilitas pada umumnya, distribusi inipun memiliki sifat-sifat antara lain fungsi distribusi kumulatif, mean, variansi dan fungsi pembangkit momen.

Distribusi Weibull adalah distribusi yang memiliki peranan yang penting terutama pada persoalan keandalan (*reliability*) dan analisis rawatan (*mantainability*). Mengingat pada kenyataannya, banyak data yang

penyebarannya tidak selalu mengikuti distribusi normal, misalnya data waktu tunggu kegagalan. Data ini memiliki kemencengan tertentu, sehingga distribusi normal kurang tepat jika tetap digunakan untuk memodelkan data tersebut, tentunya mengakomodir ketidaknormalan data. Dapat disimpulkan bahwa data yang tidak berdistribusi normal jika dianalisis dengan menggunakan distribusi normal ternyata akan menghasilkan error yang cukup besar. Salah satu error yang diperoleh yaitu rentang yang cukup besar. Hal ini tentunya akan sangat mempengaruhi kesimpulan terhadap data yang dianalisis.

B. Sejarah Distribusi Weibull

Distribusi Weibull diperkenalkan oleh Fisikawan Swedia yaitu Waloddi Weibull pada tahun 1939. [1] Waloddi Weibull (1887-1979) adalah seorang profesor di Highschool Teknis di Stockholm 1924-1953. [2]

Distribusi ini dinamai Waloddi Weibull yang pertama untuk mempromosikan kegunaan ini untuk model data set karakter yang sangat berbeda. Pada tahun 1939 Swedia insinyur WALODDI WEIBULL19 menerbitkan dua laporan pada kekuatan material dalam serangkaian diedit oleh Royal Swedish Institute for Engineering Research. Dalam "Statistik Teori Kekuatan Material" (1939a) fungsi distribusi diperkenalkan, secara empiris berdasarkan pengamatan eksperimental yang diperoleh dari tarik, lentur dan tes torsi pada batang. Dalam Fenomena Putusnya padatan "(1939b) terdapat satu kesalahan momen distribusi ini bersama dengan alat bantu grafis dan tabular untuk estimasi parameter. Seperti ROSIN / Rammler / SPERLINGS ini mendekati penalaran WEIBULL bagian yang menentukan dari makalahnya adalah empiris dan heuristik dan tidak memiliki argumentasi teoritis.[3]

Sebuah studi berikutnya dalam bahasa Inggris (Weibull 1951) adalah karya monumentalnya dimana dia menjadi model set data dari berbagai disiplin ilmu yang berbeda dan dipromosikan fleksibilitas dari model dalam hal aplikasi dalam berbagai disiplin ilmu.[4] Meskipun pertama kali diidentifikasi oleh Frechet (1972) dan diterapkan pertama kali oleh Rosin dan Rammler (1933) untuk menggambarkan ukuran distribusi partikel.

Waloddi Weibull menyampaikan makalah yang telah disahkan persoalannya pada tahun 1951. Ia menyatakan bahwa distribusinya, atau lebih khusus rumpun distribusi, diterapkan untuk berbagai macam masalah. Reaksi awal untuk makalahnya di tahun 1950 dan bahkan awal 1960-an adalah negatif, bervariasi dari skeptisisme penolakan langsung. Hanya setelah pelopor di lapangan bereksperimen dengan metode dan melakukannya dengan diverifikasi aplikasi yang luas menjadi populer. Metode khusus harus dikembangkan untuk menerapkan distribusi Weibull. Berikut ini adalah contoh dari masalah yang dapat diselesaikan dengan analisis Weibull:[5]

1. Seorang insinyur proyek melaporkan tiga kegagalan komponen dalam operasi jasa diperiode 6 minggu. Pertanyaan yang diajukan oleh Manajer Program, “Berapa banyak kegagalan diperkirakan untuk tiga bulan ke depan, enam bulan dan satu tahun?".
2. Untuk memesan suku cadang yang mungkin memiliki waktu pemakaian 2-3 tahun, bagaimana mungkin jumlah mesin yang akan kembali ke gudang menjadi ramalan tiga sampai lima tahun dari bulan ke bulan?

[1]Walpole, Ronal E & Myers, Raymond H, *Ilmu Peluang Statistika Untuk Insinyur dan Ilmuwan*, Edisi ke-4, (Bandung: ITB, 1995), h. 195.

[2]Walck, Christian, *Hand-book on Statistical Distributions for experimentalists*. (University of Stockholm: Particle Physics Group Fysikum, 2007), h. 152.

[3]Rinne, Horst, *The Weibull Distribution: A Handbook*. (London: CRC Press, 2009), h. 12.

[4]Murthy, D. N. Prabhakar, Min Xie, Renyan Jiang, *Weibull Models*. (Canada: A John Wiley & Sons, Inc., Publication, 2004), h. 10.

[5]Waloddi, Weibull, *A Statistical Distibution Function of Wide Applicability*. Joural of Applied fechanicu, 1951 pg. 293-297.

3. Apa efek pada biaya dukungan pemeliharaan akan penambahan fitur kompresor baru kejadian harus relatif terhadap kejadian penuh?
4. Jika Rekayasa Perubahan baru menghilangkan kegagalan yang ada, bagaimana banyak unit harus diuji untuk berapa jam tanpa kegagalan untuk menunjukkan dengan keyakinan 90% bahwa itu baik. "Dieliminasi atau meningkat secara signifikan?"

Sebuah model yang sama diusulkan sebelumnya oleh Rosen dan Rammler (1933) dalam konteks pemodelan variabilitas dalam diameter partikel bubuk yang lebih besar. dari ukuran tertentu. Publikasi awal dikenal berurusan dengan distribusi Weibull adalah karya Fisher dan Tippet (1928) dimana distribusi ini diperoleh sebagai distribusi membatasi ekstrem terkecil dalam sampel. Gumbel (1958) mengacu pada distribusi Weibull sebagai distribusi asimtotik ketiga ekstrem terkecil.

Meskipun Weibull bukan orang pertama yang mengusulkan distribusi, ia berperan dalam promosi dengan berbagai penerapan dari berbagai model yang berguna dan serbaguna. Sebuah laporan oleh Weibull (Weibull, 1977) berisi lebih dari 1000 referensi untuk aplikasi dari model Weibull dasar, dan pencarian baru-baru ini berbagai database menunjukkan bahwa ini telah meningkat dengan faktor 3 sampai 4 selama 30 tahun terakhir.

Distribusi Weibull selama bertahun-tahun menjadi salah satu model data statistik yang memiliki jangkauan luas dari aplikasi dalam uji hidup dan teori reliabilitas dengan kelebihan utamanya adalah menyajikan keakuratan kegagalan dengan sampel yang sangat kecil.

Berbagai perluasan dari distribusi weibull telah banyak dilakukan oleh para peneliti. Perluasan dari distribusi weibull dilakukan dengan memodifikasi ataupun menambah parameter baru. Salah satu perluasan dari distribusi weibull adalah *exponentiated weibull distribution* yang diperkenalkan oleh Mudholkar dan Srivastava dan dikaji ulang oleh M.Pal Ali J. Woo pada tahun 2006.

C. Definisi Distribusi Weibull

Distribusi Weibull adalah distribusi yang memiliki peranan yang penting terutama pada persoalan keandalan (*reliability*) dan analisis rawatan (*mantainability*). Distribusi Weibull sering dipakai sebagai pendekatan untuk mengetahui karakteristik fungsi kerusakan karena perubahan nilai akan mengakibatkan distribusi Weibull mempunyai sifat tertentu ataupun ekuivalen dengan distribusi tertentu. Distribusi ini adalah distribusi serbaguna yang dapat mengambil karakteristik dari jenis lain dari distribusi, berdasarkan nilai dari bentuk parameter.

Weibull telah diakui sebagai model yang tepat dalam studi keandalan dan masalah pengujian kehidupan seperti waktu untuk kegagalan atau panjang umur komponen atau produk. Selama bertahun-tahun, estimasi bentuk dan skala parameter untuk fungsi distribusi telah didekati melalui metode kemungkinan maksimum (MLM), metode linear, dan beberapa versi dari analisis regresi. Dalam beberapa tahun terakhir, distribusi Weibull telah menjadi salah satu yang paling umum digunakan, diterima, dianjurkan untuk menentukan potensi energi angin dan juga digunakan sebagai distribusi referensi untuk software energi angin. distribusi Weibull adalah model penting terutama untuk keandalan dan analisis rawatan.[6]

Distribusi Weibull dapat digunakan untuk memodelkan distribusi kecepatan angin di tempat kejadian tertentu dan karenanya, dapat membantu dalam penilaian sumber daya angin dari tempat kejadian. Untuk menghitung dua parameter (bentuk dan skala) untuk distribusi Weibull kurva frekuensi kecepatan angin untuk tempat kejadian dapat dibuat (Prasad et al., 2009) dan kunci untuk melakukan turbin angin

[6]Ahmed, Salahaddin A, *Comparative study of four methods for estimating Weibull parameters for Halabja, Iraq* (International Journal of Physical Sciences Vol. 8(5), pp. 186-192, 9 February), h. 186

dan perhitungan energi angin pertanian. Beberapa metode telah diusulkan untuk memperkirakan parameter Weibull (Marks, 2005; Rider, 1961; Kao, 1959; Pang et al, 2001;. Pandey et al, 2011;. Seguro dan Lambert, 2000; Stevens dan Smulders, 1979; Bhattacharya dan Bhattacharjee, 2010). Dalam literatur tentang energi angin, metode ini dibandingkan beberapa kali dan dalam cara yang berbeda (Akdag dan Ali, 2009;. Silva et al, 2004; Yilmaz et al, 2005;. Gupta, 1986;. Rahman et al, 1994; Lei, 2008; Kantar dan Senoglu, 2007). Namun, hasil dan kesimpulan dari penelitian sebelumnya yang berbeda. Beberapa tes fit digunakan dalam literatur. Sebuah metode untuk memperkirakan parameter dari distribusi campuran menggunakan momen sampel telah digariskan oleh Paul (1961) yang dianggap senyawa Poisson, binomial, dan kasus khusus dari distribusi Weibull campuran. Sebuah grafis metode untuk memperkirakan parameter Weibull campuran dalam pengujian kehidupan tabung elektron diusulkan oleh John (1959). Untuk alasan ini, menurut hasil penelitian, mungkin disimpulkan bahwa kesesuaian metode mungkin bervariasi dengan ukuran data sampel, distribusi sampel data, sampel format data dan uji kesesuaian (Akdag dan Ali, 2009).[7]

Dalam teori probabilitas dan statistik, distribusi Weibull adalah salah satu distribusi kontinu yang pertama kali diperkenalkan oleh fisikawan Swedia bernama Waloddi Weibull pada tahun 1939[8]. Distribusi Weibull merupakan salah satu model data statistik yang memiliki jangkauan luas dari aplikasi dalam uji hidup dan teori reliabilitas dengan kelebihan utamanya adalah menyajikan keakuratan kegagalan meskipun dengan sampel yang sangat kecil.[9].

Analisis data waktu hidup merupakan salah satu teknik statistika yang berguna untuk melakukan pengujian tentang ketahanan atau keandalan komponen dan analisa tersebut dapat dilakukan dengan Distribusi Weibull[10]. Distribusi Weibul adalah distribusi probabilitas penting yang digunakan dalam mencirikan perilaku probabilistik dari sejumlah besar fenomena dunia nyata. Distribusi ini berguna sebagai model kegagalan dalam menganalisis keandalan berbagai jenis sistem.[11]

Ada beberapa fungsi yang benar-benar menentukan distribusi dari variabel acak. Dalam konteks uji hidup, enam fungsi matematis setara telah berevolusi yaitu:[12]

[7]*Ibid*, h. 186-187.

[8]Hazhiah, Indria T, Sugianto & Rahmawati, Rita, *Estimasi Parameter Distribusi Weibull Dua Parameter Menggunakan Metode Bayes*. Jurnal Media Statistika, 2012. pg. 27-35.

[9]Hossain, Anwar & Zimmer, William. (2003). *Comparison of Estimation Methods for Weibull Parameters: Complete and Censored Samples*. Journal of Statistical Computation and Simulation. pg. 145-153.

[10]Ni'ma, Roudlotin & Agoestanto, Arief. (2014). *Estimasi Bayes untuk Rata-Rata Hidup dari Distribusi Rayleigh Pada Data Disensor Tipe II*. UNNES Journal of Mathematics. pg. 1-8.

[11]Qiao, Hongzhi & Tsokos, Chris P. (1994). *Parameter Estimation of the Weibull Probability Distribution*. Journal Mathematics and Computers in Simulation. pg. 47-55.

[12]Rinne, Horst, *The Weibull Distribution: A Handbook*. (London: CRC Press, 2009), h. 27.

1. **Kegagalan Kepadatan (*the failure density*);**
   Fungsi kepadatan (disingkat dengan DF) $f(x)$:

$$f(x) \geq 0 \ \forall x \quad \text{and} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

Disebut kegagalan kepadatan dan memberikan kesempatan unit gagal atau mati pada usia x. Probabilitas bersyarat dari unit yang baru lahir atau baru diproduksi mati atau gagal sekitar usia x diberikan oleh

$$\Pr(x - \Delta x/2 < X \leq x + \Delta x/2) \approx f(x)\,\Delta x; \ \ \Delta x \text{ small.} \qquad (2.1a)$$

Probabilitas bersyarat mencapai usia antara kali xℓ dan xu, xℓ <xu, adalah diberikan oleh:

Bias $$\Pr(x_\ell < X \leq x_u) = \int_{x_\ell}^{x_u} f(x)\,\mathrm{d}x. \qquad (2.1b)$$

2. **Kegagalan Distribusi (*the failure distribution*);**
   Fungsi distribusi kumulatif (CDF) disebut distribusi hidup atau kegagalan distribusi:

$$F(x) := \Pr(X \leq x) = \int_0^x f(z)\,\mathrm{d}z. \qquad (2.2)$$

$f(x)$ memberikan probabilitas gagal sampai waktu x atau memiliki masa hidup paling x. $f(x)$adalah fungsi non-peningkatan x memuaskan.

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \ \text{ and } \ \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$$

3. **Fungsi Keandalan (*the reliability function*);**
   Fungsi distribusi kumulatif komplementer (CCDF) disebut fungsi survival (survivor) atau fungsi keandalan:

$$R(x) := \Pr(X > x) = \int_x^\infty f(z)\,\mathrm{d}z. \qquad (2.3)$$

R (x) a unan fungsi dari x memuaskan

$$\lim_{x \to -\infty} R(x) = 1 \ \text{ and } \ \lim_{x \to +\infty} R(x) = 0$$

4. **Tingkat Resiko (*the hazard rate*);**

   Tingkat resiko atau tingkat kegagalan sesaat (HR; juga dikenal sebagai fungsi tingkat atau fungsi intensitas) didefinisikan sebagai

$$h(x) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Pr(x < X \leq x + \Delta x \mid X > x)}{\Delta x} = \frac{f(x)}{R(x)} \qquad (2.4)$$

$$h(x) \geq 0 \ \forall x \quad \text{and} \quad \int_0^\infty h(x)\,\mathrm{d}x = \infty$$

Dalam kehandalan kerja h (x) adalah populer karena memiliki interpretasi intuitif sebagai jumlah risiko yang terkait dengan item yang memiliki selamat ke waktu x. Dalam demografi dan ilmu aktuaria h (x) dikenal sebagai kekuatan untuk kematian. 1 Di tabel hidup h (x) didekati dengan probabilitas bahwa seseorang usia x akan mati dalam tahun berikutnya. Beberapa pengertian penuaan mengacu HR:

$$h'(x) = \frac{\mathrm{d}h(x)}{\mathrm{d}x} \begin{cases} > 0 \ \forall x \ \text{ means } \textbf{positive aging}; \\ = 0 \ \forall x \ \text{ means } \textbf{no aging}; \\ > 0 \ \forall x \ \text{ means } \textbf{negative aging}. \end{cases}$$

5. **Tingkat Resiko Kumulatif (*the cumulative hazard rate*);**

$$H(x) := \int_0^x h(z)\,\mathrm{d}z. \qquad (2.5)$$

CHR adalah fungsi non-menurun dari x memuaskan H (0) = 0 dan limx → ∞H (x) = ∞. H (x) tidak dinormalisasi ke unit interval [0, 1]. Karena H (x) = -ln [R (x)], H (x) memiliki distribusi eksponensial dengan rata-rata satu. Jadi H-1 [-ln (1 - Y)] menghasilkan nomor acak untuk simulasi Monte Carlo ketika Y terdistribusi secara seragam pada [0, 1].

6. **Rata-rata fungsi sisa umur (*the mean residual life function*);**

$$\begin{aligned} \mu(x) := \mathrm{E}(X - x \mid X > x) &= \frac{\int_x^\infty z\, f(z)\,\mathrm{d}z}{R(x)} - x \\ &= \frac{\int_x^\infty R(z)\,\mathrm{d}z}{R(x)}, \text{ if } \lim_{x\to\infty} x^2 f(x) = 0 \qquad (2.6) \end{aligned}$$

pkan tambahan item

$$\mu(x) \geq 0; \quad \frac{\mathrm{d}\mu(x)}{\mathrm{d}x} \geq -1; \quad \int_0^\infty \frac{1}{\mu(x)}\,\mathrm{d}x = \infty$$

Kemungkinan kehidupan atau total perkiraan umur dari item setelah selamat ke x diberikan oleh x + (x). Terutama, adalah usia rata-rata item baru.

$$\mu(0) = \mathrm{E}(X) = \mu = \int_0^\infty R(z)\,\mathrm{d}z \qquad (2.7)$$

Berdasarkan beberapa pendapat tersebut, maka dapat disimpulkan bahwa Distribusi Weibull adalah model data statistik dalam teori probabilitas statistik yang digunakan dalam menganalisis data waktu hidup atau jangkauan untuk menyajikan informasi tentang keakuratan dan kegagalan suatu produk. Distribusi Weibull ini merupakan metode statistika yang cukup populer digunakan karena memiliki keunggulan utama yaitu dapat digunakan meskipun pada kasus sampel kecil.

D. Rumus Distribusi Weibull

Distribusi Weibull pertama kali diperkenalkan oleh Weibull pada tahun 1936 dengan 3 (tiga) parameter, yang kemudian seiring perkembangan konsep Distribusi Weibull tersebut terdapat juga distribusi Weibull dengan dua dan satu parameter, dengan masing-masing distribusinya dikemukakan sebagai berikut.[13]

1. **Distribusi Weibull 3 Parameter**

   Distribusi Weibull 3 Parameter merupakan metode analisis Weibull yang memuat tiga parameter secara simultan yaitu parameter lokasi (a), parameter skala (b), dan parameter bentuk (c). Rumus Distribusi Weibull 3 parameter dikemukakan sebagai berikut. [14]

[13]Rinne, Horst, *The Weibull Distribution: A Handbook*. London: CRC Press, 2009

[14]*Ibid.*

$$f(x|a,b,c) = \frac{c}{a}\left(\frac{x-a}{b}\right)^{c-1} exp\left\{-\left(\frac{x-a}{b}\right)^{c}\right\}, x \geq a$$

dimana,
a : parameter lokasi
b : parameter skala
c : parameter bentuk

2. Distribusi Weibull 2 Parameter

Berbeda dengan Distribusi Weibull 3 Parameter, pada model 2 parameter hanya dua parameter yangdigunakan secara simultan. Distribusi Weibull 2 Parameter dikelompokkan menjadi tiga versi yaitu: versi skala bentuk, versi lokasi bentuk, dan versi pergeseran skala. Rumus dari ketiga versi tersebut dikemukakan sebagai berikut.

a. Distribusi versi skala bentuk.

$$f(x|0,b,c) = \frac{c}{b}\left(\frac{x}{b}\right)^{c-1} exp\left\{-\left(\frac{x}{b}\right)^{c}\right\}$$

b. Distribusi versi lokasi bentuk

$$f(x|a,1,c) = c(x-a)^{c-1}exp\{-(x-a)^{c}\}$$

c. Distribusi versi pergeseran skala

$$f(x|a,b,1) = \frac{1}{b}exp\left\{-\left(\frac{x-a}{b}\right)^{c}\right\}$$

3. Distribusi Weibull 1 Parameter

Distribusi Weibull 1 Parameter merupakan model Weibull yang hanya menggunakan satu parameter dalam formula analisisnya. Distribusi ini terbagi ke dalam tiga versi yang terpusat di setiap parameter. Rumus distribusi tersebut sebagai berikut.

a. $f(x|0,1,c) = c(x)^{c-1}exp\{-x^{c}\}$
b. $f(x|0,b,1) = \frac{1}{b}exp\left\{-\left(\frac{x}{b}\right)^{c}\right\}$
c. $f(x|a,1,1) = exp\{-(x-a)^{c}\}$

Perhatikan bahwa dalam perumusan 1-parameter Weibull, kita mengasumsikan bahwa parameter bentuk diketahui apriori dari pengalaman masa lalu dengan produk yang identik atau mirip. Keuntungan melakukan hal ini adalah bahwa data set dengan sedikit atau tidak ada kegagalan dapat dianalisis.

Menurut Walpole & Myers bahwa peubah acak kontinyu X berdistribusi Weibull, dengan parameter α dan β jika fungsi padatnya berbentuk:[15]

[15]Walpole, Ronal E & Myers, Raymond H. *Ilmu Peluang Statistika Untuk Insinyur dan Ilmuwan*., h. 195-198.

$$fx = \begin{cases} \alpha\beta\chi^{\beta-1}e^{-\alpha x\beta} & , x>0 \\ 0, & \text{Untuk x lainnya} \end{cases}$$

Dengan α=1 dan β>0

Untuk menggunakan distribusi Weibull dalam teori keandalan, perlu didefinisikan terlebih dahulu keandalan suatu komponen atau alat sebagai peluang bahwa komponen tersebut akan berfungsi sebagaimana mestinya selama, paling sedikit, sampai jangka waktu tertentu dalam keandalan percobaan yang telah tertentu. Jadi R(t) menyatakan keandalan komponen tersebut pada waktu t maka ditulis:

$$R(t) = P(T > t)$$
$$= \int_{=1-F(t)}^{\infty} f(t)dt$$

Jika F(t) menyatakan distribusi tumpukan T. Peluang bersyarat bahwa suatu komponen akan gagal dalam selang waktu T=t sampai T=t+Δt, bila diketahui berfungsi dengan baik sampai waktu t, diberikan oleh:

$$\frac{F(t+\Delta t) - F(t)}{R(t)}$$

Bila nisbah ini dibagi dengan Δt dan diambil dengan membuat Δt→0 maka diperoleh tingkat kegagalan, dinyatakan dengan Z(t). Jadi:

$$Z(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{F(t+\Delta t)}{\Delta t} \frac{1}{R(t)}$$
$$= \frac{F(t)}{R(t)} = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{f(t)}{1-F(t)'}$$

Yang menggambarkan tingkat kegagalan dinyatakan dalam distribusi waktu sampai gagal. Dari kenyataaan bahwa R(t)=1-F(t) dan kemudian R'(t)=−*F*^(t) maka dapat ditulis persamaan diferensial:

$$Z(t) = \frac{-R'(t)}{R(t)} = \frac{-d[\ln R(t)]}{dt}$$

Dan kemudian dicari jawabannya

$$\ln R(t) = -\int Z(t)dt + \ln c$$

Atau

$$R(t) = ce^{-\int z(t)dt}$$

Dengan c memenuhi syarat permulaan bahwa R(0)=1 atau F(0)=1−$R(0) = 0$. Jadi bila salah satu dari fungsi padat $f(t)$ ataupun tingkat kegagalan $Z(t)$ diketahui, maka yang lainnya dapat ditentukan secara tunggal.

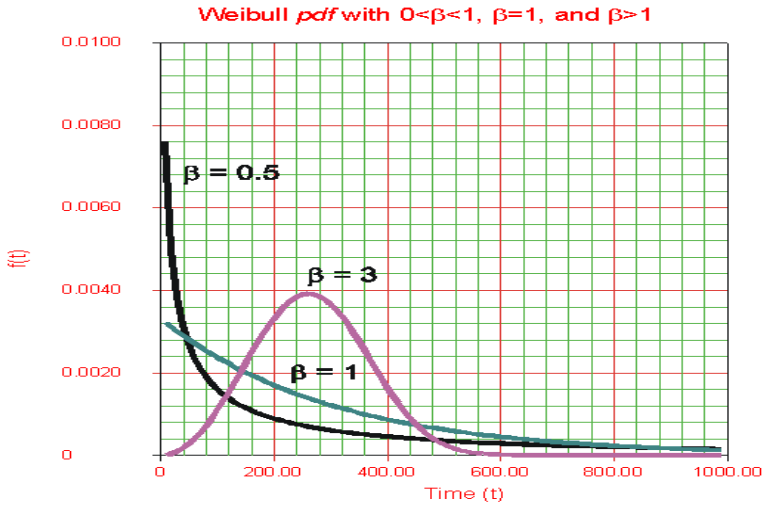
E. Ciri-Ciri Distribusi Probabilitas Weibull

Pada dasarnya distribusi probabilitas Weibull dicirikan dengan ketiga parameternya. Parameter yang dimaksud adalah parameter bentuk, parameter skala, dan parameter lokasi. Ketiga parameter ciri tersebut diuraikan sebagai berikut.

1. **Parameter Bentuk (*c* / β)**

   Parameter bentuk juga dikenal sebagai lereng Weibull. Hal ini karena nilai parameter bentuk *c* / β sama dengan

kemiringan garis dalam plot probabilitas. Nilai yang berbeda dari parameter bentuk dapat memiliki efek pada distribusi data. Bahkan, beberapa nilai dari parameter bentuk akan menyebabkan persamaan distribusi yang berbeda. Misalnya, ketika β = 1, model tiga parameter Weibull menjadi model dua parameter. Gambar berikut ini menunjukkan efek dari nilai-nilai yang berbeda dari parameter bentuk, β, pada bentuk *probability density function* / pdf (dengan a / γ konstan). Berikut ini contoh plot dengan variasi nilai parameter bentuk.

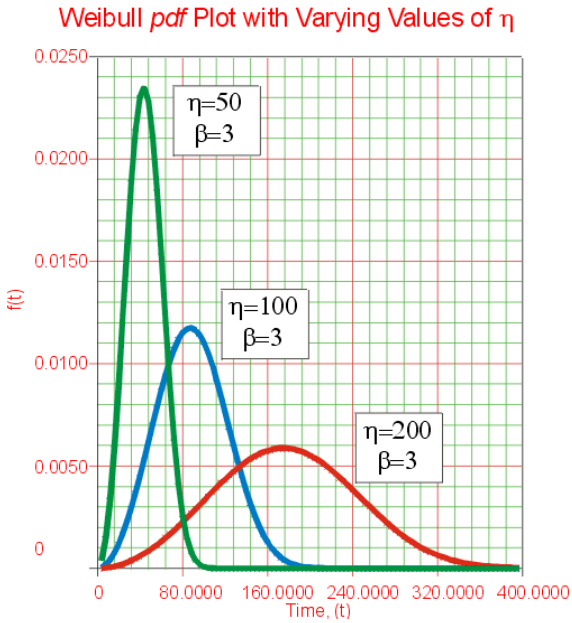


Gambar 1. Plot PDF dengan Variasi Nilai Parameter Bentuk

Gambar tersebut menunjukkan pengaruh parameter bentuk (*c* / β) terhadap *probability density function*. Nilai parameter bentuk yang berbeda akan berpengaruh pada bentuk lereng plot atau kemiringan kurva.

2. Parameter Skala (b / η)

Parameter skala (b / η) menunjukkan skala absis. Perubahan parameter skala, (b / η) memiliki efek pada distribusi sebagai perubahan dari skala absis. Peningkatan nilai parameter skala (b / η) dengan mengontrol (c / β) konstan memiliki efek peregangan keluar pada *probability density function* (pdf). Karena daerah di bawah kurva pdf adalah nilai konstan satu, "puncak" dari kurva pdf juga akan menurun dengan meningkatnya parameter skala (b / η), seperti yang ditunjukkan pada gambar berikut.

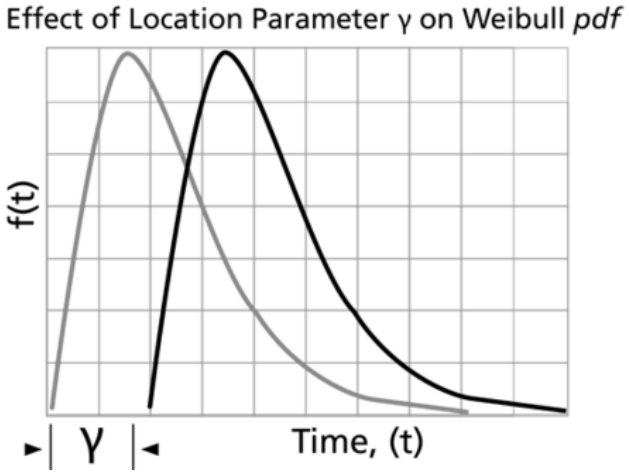


Gambar 2. Plot PDF dengan Variasi Nilai Parameter Skala

Gambar tersebut menunjukkan pengaruh parameter skala (*b* / η) terhadap *probability density function*. Jika parameter bentuk (*b* / η) meningkat, sementara (c / β) dan (a / γ) dikontrol sama, distribusi akan mengulurkan ke kanan dan tingginya menurun, sambil mempertahankan bentuk dan lokasi. Jika parameter bentuk (*b* / η) menurun, sedangkan (c / β) dan (a / γ) dikontrol sama, distribusi akan didorong ke arah kiri (yaitu, menuju awal atau menuju 0 atau γ), dan tinggi meningkat.

3. Parameter Lokasi (a / γ)

Parameter lokasi (a / γ) seperti namanya, menempatkan distribusi sepanjang absis. Mengubah nilai parameter lokasi (a / γ) memiliki efek geser pada distribusi. Kurva berikut diberi gambaran parameter lokasi yang berbeda.



Gambar 3. Plot PDF dengan Variasi Nilai Parameter Lokasi

Gambar tersebut menunjukkan pengaruh parameter lokasi (*a* / γ) terhadap *probability density function*. Ketika γ = 0 distribusi dimulai pada t = 0 atau asal. Jika γ > 0 distribusi dimulai pada lokasi y ke kanan asal. Jika γ < 0, distribusi dimulai pada lokasi γ di sebelah kiri asal. γ memberikan perkiraan waktu-ke-kegagalan awal dari unit tersebut. Kehidupan periode 0 hingga + γ adalah kegagalan masa operasi bebas. Parameter γ memberikan perkiraan waktu awal kegagalan dapat diamati. Sebuah γ negatif dapat menunjukkan bahwa kegagalan telah terjadi sebelum awal tes, yaitu selama produksi, penyimpanan, transit, selama *checkout* sebelum dimulainya misi, atau sebelum penggunaan aktual. γ memiliki satuan yang sama dengan t, seperti jam, mil, siklus, aktuasi, dll.

Distribusi Weibull ditandai oleh dua parameter, satu adalah skala parameter c (m/s) dan yang lainnya adalah parameter bentuk k (berdimensi). Dalam distribusi Weibull, variasi kecepatan angin ditandai dengan dua fungsi yang merupakan fungsi kepadatan probabilitas (PDF) dan fungsi distribusi kumulatif (CDF). PDF $_{f,v,k,c}$ menunjukkan peluang waktu (atau probabilitas) yang angin pada kecepatan tertentu V. Hal ini diberikan oleh Bhattacharjee (2010)[16] dan Weisser (2003).[17]

[16]Bhattacharya P, Bhattacharjee R (2010). *A study on Weibull distribution for estimating the parameters*. Journal of Applied Quantitative Methods 5(2):234-241

[17]Weisser DA (2003). *Wind energy analysis of Grenada, an estimation using Weibull density function*. Renew. Energy 28:1803-1812

$$f_{(v,k,c)} = \frac{k}{c}\left(\frac{V}{c}\right)^{k-1} e^{-(V/c)^k} \quad (1)$$

Di mana v> 0, dan k, c> 0 CDF dari kecepatan V memberikan peluang waktu (atau probabilitas) bahwa kecepatan angin sama atau lebih rendah dari V, dengan demikian, adalah integral dari PDF, diberikan oleh) distribusi kumulatif $_{f,v,k,c}$ diberikan oleh:

$$F_{(V,k,c)} = \int_0^\infty f(V)dV = 1 - e^{-(V/c)^k} \quad (2)$$

Kecepatan angin rata-rata dapat dinyatakan sebagai:

$$\overline{V} = \int_0^\infty V f(V)dV \quad (3)$$

$$\overline{V} = \int_0^\infty V \frac{k}{c}\left(\frac{V}{c}\right)^{k-1} e^{-(V/c)^k} dV \quad (4)$$

Ini dapat disusun kembali:

$$\overline{V} = k\int_0^\infty \left(\frac{v}{c}\right)^k e^{-(v/c)^k} dV \quad (5)$$

Menggunakan:

$$x = \left(\frac{v}{c}\right)^k, dV = \frac{c}{k} x^{\left(\frac{1}{k}-1\right)} dx \quad (6)$$

Persamaan 5 dapat disederhanakan sebagai:

$$\overline{V} = c\int_0^\infty e^{-x} x^{1/k} dx \quad (7)$$

$$\Gamma n = \int_0^\infty e^{-x} x^{n-1} dx \quad (8)$$

Dari Persamaan 7 dan 8, $n = 1 + \frac{1}{k}$ epatan rata-rata dapat dinyatakan sebagai:

$$\overline{V} = c\Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right) \quad (9)$$

Standar deviasi dari kecepatan angin V diberikan oleh:

$$\sigma = \sqrt{\int_0^\infty (v - \overline{v})^2 f(v)dv} \quad (10)$$

$$\sigma = \sqrt{\int_0^\infty v^2 f(v)dv - 2\overline{v}\int_0^\infty v f(v)dv + v^{-2}}$$

or

$$\sigma = \sqrt{\int_0^\infty v^2 f(v)dv - 2\overline{v}\,\overline{v} + v^{-2}} \quad (11)$$

Menyamakan dengan:

$$\int_0^\infty c^2 x^{2/k} e^{(-x)} dx \qquad (12)$$

dan menempatkan $n = 1 + \frac{2}{k}$, maka persamaan berikut dapat diperoleh. Oleh karena itu, mendapatkan standar deviasi:[18]

$$\sigma = \left[c^2 \Gamma\left(1 + \frac{2}{k}\right) - c^2 \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{k}\right) \right]^{1/2} \qquad (13)$$

atau:

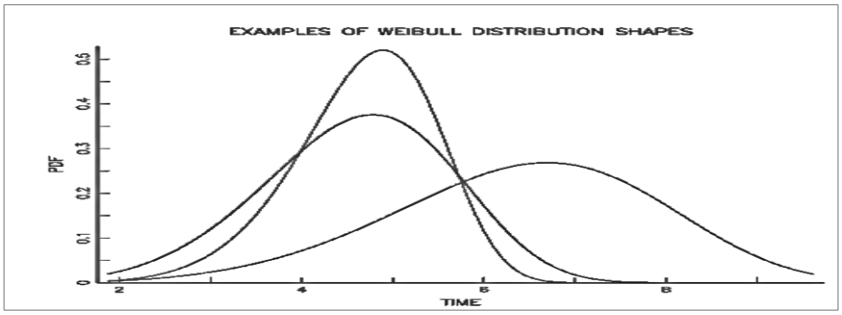
$$\sigma = c \sqrt{\Gamma\left(1 + \frac{2}{k}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{k}\right)} \qquad (14)$$

Tetapi fungsi distribusi kumulatif ditransformasikan ke fungsi linear seperti di bawah:

$$\ln \ln \{\frac{1}{1 - F(v)}\} = k \ln v - k \ln c \quad Y = bX + a \ldots (15)$$

Dimana: $Y = \ln \ln \{\frac{1}{1 - F(v)}\}$, $X = \ln v$, $a = -k \ln c$, $b = k$

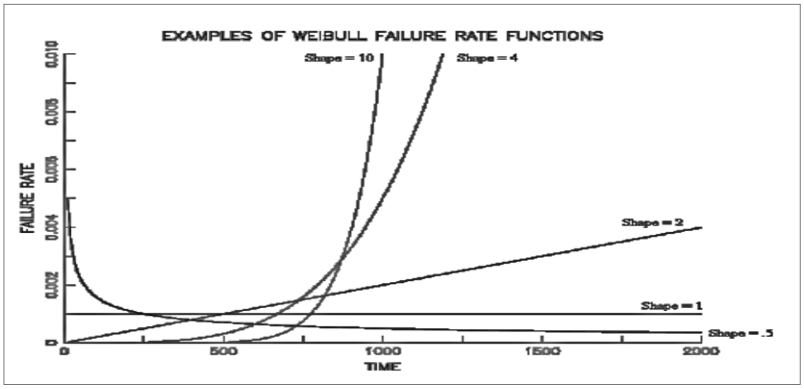
Distribusi Weibull adalah model distribusi probabilitas yang sangat fleksibel dengan dua parameter. Memiliki CDF dan PDF tergantung pada nilai γ parameter bentuk, model Weibull secara empiris dapat memuat berbagai bentuk data yang histogram. Hal ini ditunjukkan oleh PDF contoh kurva di bawah ini. [19]



Dari model sudut pandang tingkat kegagalan, distribusi Weibull adalah perluasan alami dari tingkat kegagalan Model eksponensial konstan sejak Weibull memiliki tingkat kegagalan polinomial dengan eksponen {γ-1}. Hal ini membuat semua kurva tingkat kegagalan yang ditampilkan dalam plot berikut mungkin.

[18]Ahmed, Salahaddin A., *Comparative study of four methods for estimating Weibull parameters for Halabja, Iraq*., h. 187.

[19]*Nist/Sematech e-Handbook of Statistical Methods*, http://www.itl.nist.gov/div898/ handbook/, date.(Links to specific pages can also be referenced this way, if suitable.)

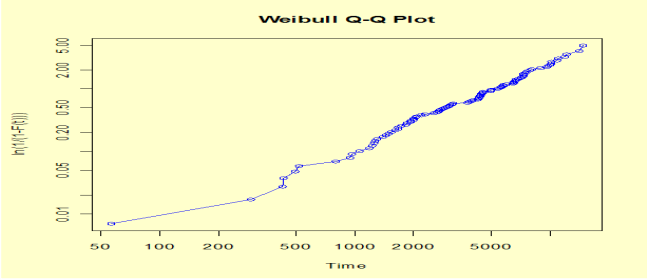


Berdasarkan ciri-ciri distribusi Weibull yang dikemukakan di atas, dapat disimpulkan bahwa pada dasarnya distribusi Weibull dicirikan dengan ketiga parameternya yaitu parameter bentuk, parameter skala, dan parameter lokasi yang digunakan dalam menganalisis data waktu hidup atau jangkauan untuk menyajikan informasi tentang keakuratan dan kemampuan untuk model berbagai tingkat kegagalan yang fleksibel.

F. Aplikasi Distribusi Probabilitas Weibull

Seperti telah dijelaskan di atas bahwa distribusi Weibull termasuk salah satu distribusi yang fleksibel. Fleksibilitas ini dapat dilihat dari banyaknya bidang yang mengaplikasikan distribusi ini dalam analisis datanya. Khususnya dalam masalah data reliabilitas, distribusi inipun memiliki fleksibilitas diantaranya dapat digunakan untuk menganalisis data dengan tingkat kegagalan yang tidak selalu konstan.

Penggunaan Model Distribusi Weibull: (1) Distribusi Weibull telah berhasil digunakan dalam banyak aplikasi sebagai model empiris murni, karena bentuk dan kemampuan untuk model berbagai tingkat kegagalan yang fleksibel; (2) Model Weibull dapat diturunkan secara teoritis sebagai bentuk Nilai Ekstrim Distribusi, yang mengatur waktu untuk terjadinya "hubungan terlemah" dari banyak proses kegagalan berlawanan. Hal ini mungkin menjelaskan mengapa hal itu telah begitu sukses dalam aplikasi seperti kapasitor, bantalan bola, penggantian dan kegagalan kekuatan bahan; (3) khusus kasus lain dari Weibull terjadi ketika bentuk parameter adalah 2. Distribusi disebut Distribusi Rayleigh dan ternyata menjadi model probabilitas teoritis untuk besarnya kesalahan radial ketika koordinat x dan y kesalahan yang normals independen dengan 0 berarti dan standar deviasi yang sama. [20] Misalnya: dihasilkan 100 Weibull variabel acak menggunakan T = 1000, γ = 1,5 dan α = 5000. Untuk melihat seberapa baik ini titik data random sebenarnya cocok dengan distribusi Weibull, menghasilkan plot probabilitas yang ditunjukkan di bawah. Catatan skala log yang digunakan adalah basis 10.



[20] *NIST/SEMATECH e-Handbook of Statistical Methods*, http://www.itl.nist.gov/div898/handbook/, date.(Links to specific pages can also be referenced this way, if suitable.)

Jika data mengikuti distribusi Weibull, poin harus mengikuti garis lurus. Kita bisa comput PDF dan nilai-nilai CDF untuk waktu kegagalan T = 1000, dengan menggunakan contoh distribusi Weibull dengan $\gamma = 1{,}5$ dan $\alpha = 5000$. Nilai PDF adalah 0,000123 dan nilai CDF adalah 0,08556. Fungsi untuk menghitung Weibull nilai PDF, nilai CDF, dan untuk memproduksi plot probabilitas, yang ditemukan di kedua kode dan R dataplot kode.

Aplikasinya lainnya dari distribusi Weibull dijelaskan bahwa model ini banyak dipergunakan untuk sebaran fungsinya berupa fungsi tidak linier terhadap waktu t. Fungsi padat peluang dari model distribusi Weibull adalah:[21]

$$f(t) = \frac{\gamma}{\theta} t^{\gamma-1} e^{-\frac{t^{\gamma}}{\theta}}, \quad t > 0 \qquad (1)$$

dengan parameter θ dan γ adalah bernilai positif. Parameter θ merupakan parameter skala merupakan karakteristik umur, yang menggambarkan sifat umur produk. Sedangkan parameter γ merupakan parameter bentuk, yang menggambarkan macam-macam bentuk distribusinya, jika nilainya bervariabel. Jika nilai γ dilakukan simulasi pada fungsi padat peluang Weibull, maka akan didapat distribusi seperti pada tabel berikut.

Tabel 1. Hasil Simulasi Nilai γ terhadap Distribusi

γ	$f(t)$	**Distribusi**
1	$\frac{1}{\theta} e^{-\frac{t}{\theta}}$	Eksponensial
2	$\frac{2}{\theta} t e^{-\frac{t^2}{\theta}}$	Rayleigh
3,43927	$\frac{3{,}43927}{\theta} t^{2{,}43927} e^{-\frac{t^{3{,}43927}}{\theta}}$	Normal[2]

Selanjutnya, fungsi distribusi kumulatif Weibull diberikan dengan:

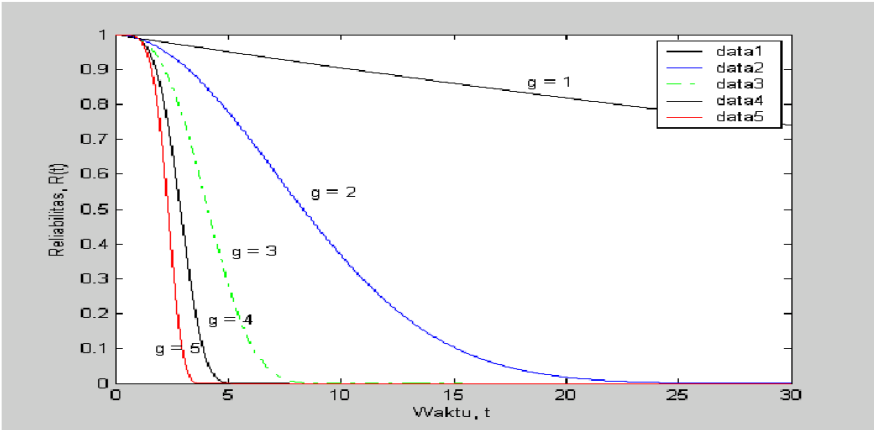
$$F(t) = \int_0^t \frac{\gamma}{\theta} \zeta^{\gamma-1} e^{-\frac{\zeta^{\gamma}}{\theta}} \, d\zeta = 1 - e^{-\frac{t^{\gamma}}{\theta}}, \quad t > 0 \qquad (2)$$

Fungsi reliabilitas Weibull adalah:

$$R(t) = e^{-\frac{t^{\gamma}}{\theta}}, \quad t > 0 \qquad (3)$$

Berikut ini disajikan plot dari fungsi reliabilitas Weibull untuk bermacam-macam nilai γ (atau g), untuk suatu θ diambil konstan.

[21]Sudarno. (2009). *Karakteristik Umur Produk Pada Model Weibull*. (Media Statistika, Vol. 2, No. 2, Desember), h. 105-110.



Gambar 4 Plot Fungsi Reliabilitas Weibull terhadap Waktu

Berdasarkan gambar di atas, diperoleh kesimpulan bahwa untuk nilai θ konstan, fungsi reliabilitasnya adalah makin kecil, jika nilai γ makin besar terhadap waktu. Dapat pula dikatakan bahwa fungsi reliabilitas Weibull kurang sensitive untuk nilai γ yang besar, dimana nilai θ dianggap konstan. Juga, fungsi tingkat risiko Weibull diberikan dengan:

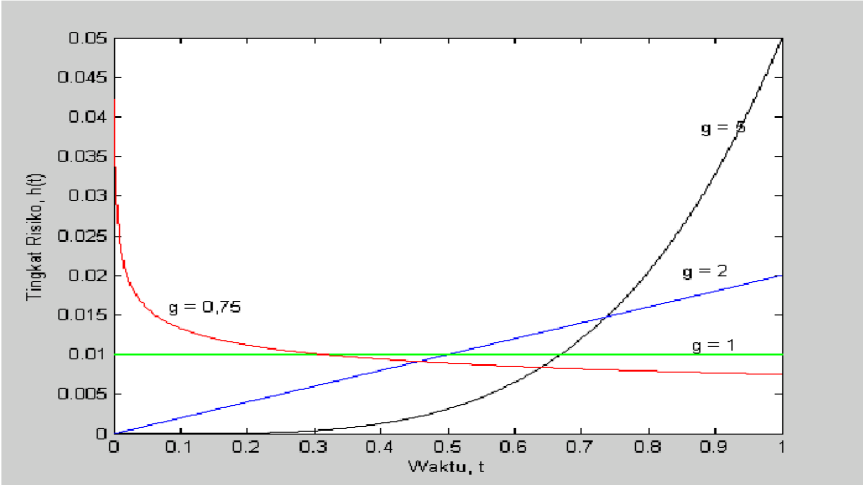
$$h(t) = \frac{f(t)}{1-F(t)} = \frac{\gamma}{\theta} t^{\gamma-1} \qquad (4)$$

Jika dilakukan simulasi secara umum terhadap nilai γ dengan θ dianggap konstan pada fungsi tingkat risiko Weibull didapat keputusan fungsi seperti pada tabel berikut ini.

Tabel 2. Hubungan antara γ dengan Fungsi

γ	**Fungsi**
>1	Monoton Naik
= 1	Konstan
< 1	Monoton Turun

Di bawah ini ditampilkan plot dari fungsi tingkat risiko Weibull untuk suatu θ konstan dengan bermacam-macam nilai γ (atau g).



Gambar 5. Plot Fungsi Tingkat Risiko Weibull terhadap Waktu

Berdasarkan gambar di atas, untuk nilai θ konstan dapat dikatakan bahwa pada γ = 1, maka h(1) merupakan fungsi konstan. Sedangkan pada γ lebih dari 1, nilai awal h(γ) lebih kecil dari h(1) tetapi akhirnya lebih besar darinya, yang mana makin besar nilai γ nilai fungsi h(γ) akan cepat besar. Sebaliknya, pada γ kurang dari 1, nilai awal h(γ) lebih besar dari h(1) tetapi akhirnya lebih kecil darinya,

$$R(t) = e^{-0,01t^5}, t > 0$$

yang mana makin kecil nilai γ nilai fungsi h(γ) akan cepat mengecil. Misalkan suatu produk diasumsikan bahwa waktu kegagalannya adalah berdistribusi Weibull dengan parameter θ = 100 dan γ = 5. Maka reliabilitas untuk waktu sesudah t adalah

Sehingga untuk t = 1,5 tahun didapat R(1,5) = 0,9269. Sedangkan tingkat risiko pada waktu t adalah $h(t) = 0{,}05t^4$,pada t = 1,5 tahun tingkat risikonya adalah 0,2531 kegagalan per tahun.

Selanjutnya aplikasi distribusi Weibull untuk mengetahui mengetahui rataan waktu gagal. Rataan waktu gagal merupakan taksiran waktu antar dua kegagalan yang berturutan pada produk yang sekali pakai. Misal terdapat n produk yang sekali pakai dan diamati kapan waktu kegagalannya. Andaikan waktu kegagalannya masing-masing dinyatakan dengan t_1, t_2, ... t_n. Taksiran rataan waktu gagal adalah $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i$ Karena t_i merupakan variabel acak, maka secara umum variabel acak ini dapat diganti dengan variabel acak T, yang menyatakan waktu kegagalan. Sehingga taksiran nilainya dapat dinyatakan dengan:

$$E[T] = \int_0^\infty t\, f(t)\, dt\,. \qquad (5)$$

Telah diketahui bahwa $R(t) = 1 - F(t)$ dan $f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = -\frac{dR(t)}{dt}$ .Sehingga persamaan (5) menjadi:

$$E[T] = -\int_0^\infty t\, dR(t) = \int_0^\infty R(t)\, dt\,, \qquad (6)$$

Karena $R(\infty) = 0$ dan R(0)=1 Selanjutnya menentukan rataan waktu gagal untuk distribusi Weibull. Berdasarkan Persamaan (3) dan (6), maka: Dengan mensubstitusi , maka Persamaan (7) menjadi: $x = \frac{t^y}{\theta}$

$$E[T] = \int_0^\infty e^{-\frac{t^\gamma}{\theta}}\, dt\,. \qquad (7)$$

yang dapat dipergunakan untuk menentukan umur produk. Sedangkan ragam waktu gagal dari distribusi Weibull yaitu:

$$Var[T] = \theta^{\frac{2}{\gamma}} \left\{ \Gamma\left(1 + \frac{2}{\gamma}\right) - \left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right)\right]^2 \right\} \qquad (9)$$

dengan $\Gamma(n)$ merupakan fungsi gamma, yaitu:

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x}\, dx \text{ dan } \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x/\theta}\, dx = \Gamma(n)\, \theta^n\,.$$

Misal suatu produk diasumsikan bahwa waktu kegagalannya adalah berdistribusi Weibull dengan parameter θ = 100 dan γ = 5. Maka taksiran umur produk dapat dicari menggunakan rataan waktu gagal, yaitu

$100^{0,4} \left\{ \Gamma(1{,}4) - [\Gamma(1{,}2)]^2 \right\} = 0{,}2791$. Oleh karena itu simpangan bakunya adalah 0,5283 tahun.

Selain untuk mengetahui rataan waktu gagal, distribusi Weibull dapat diaplikasikan untuk mengetahui rataan sisa umur L(t). Fungsi ini didefinisikan sebagai berikut:

$$L(t) = E[T - t \mid T \geq t], \quad t \geq 0\,. \qquad (10)$$

Maka fungsi rataan sisa umur adalah taksiran sisa umur, T – t, yang diberikan produk yang telah hidup sampai waktu t. Jika fungsi densitas peluang bersyarat untuk sembarang waktu adalah:

$$f_{T|T\geq t}(\tau) = \frac{f(\tau)}{R(t)}, \quad \tau \geq t\,. \qquad (11)$$

Maka ekspektasi bersyarat dari fungsi yang diberikan dalam Persamaan (11) adalah:

$$E[T \mid T \geq t] = \int_t^{\infty} \tau f_{T|T\geq t}(\tau)\, d\tau = \int_t^{\infty} \tau \frac{f(\tau)}{R(t)}\, d\tau . \qquad (12)$$

Berdasarkan Persamaan (10), (11), dan (12), diperoleh rataan sisa umur berikut ini

$$L(t) = \int_t^{\infty} (\tau - t)\frac{f(\tau)}{R(t)}\, d\tau = \frac{1}{R(t)}\int_t^{\infty} \tau f(\tau)\, d\tau - t, \qquad (13)$$

Karena $R(t) = \int_t^{\infty} f(\tau)\, d\tau$

Andaikan suatu produk dianggap bahwa waktu kegagalannya adalah berdistribusi Weibull dengan parameter θ = 100 dan γ = 5. Maka akan mempunyai fungsi densitas peluang $F(t) = 1 - e^{-0{,}01t^5}, t > 0$. Sehingga didapat fungsi distribusi kumulatifnya $f(t) = 0{,}05t^4 e^{-0{,}01t^5}, t > 0$

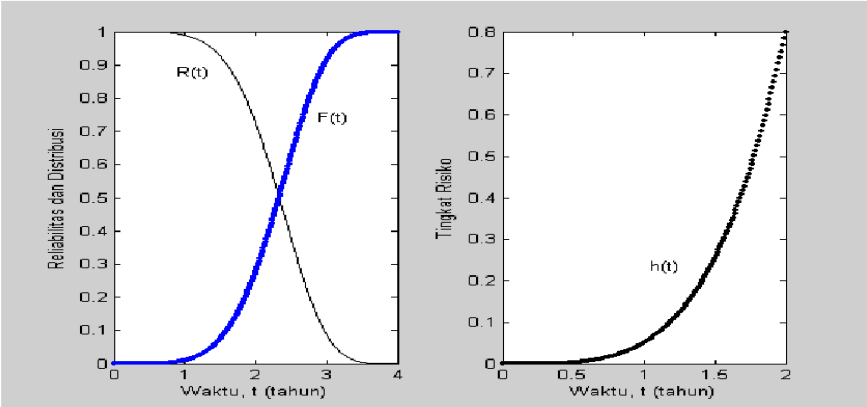
Karena R(t)=1 - F(t), maka reliabilitas untuk waktu sesudah t adalah: $R(t) = e^{-0{,}01t^5}$

Sedangkan tingkat risiko pada waktu t adalah $h(t) = 0{,}05t^4$

Jika produk telah hidup selama 1,5 tahun atau 18 bulan, maka diperoleh R(1,5) = 0,9269. Sehingga rataan sisa umur produk tersebut adalah

$$L(1{,}5) = \frac{0{,}05}{0{,}9269}\int_{\infty}^{\infty} t^5 e^{-0.01t^5}\, dt - 1{,}5 = 0{,}8927\, tahun \qquad (14)$$

Jadi taksiran sisa umur produk tersebut adalah kira-kira 10,7 bulan lagi baru mati. Gambar untuk sebaran fungsi dari karakteristik produk pembahasan di atas, diberikan di bawah ini.



Gambar 6. Plot Fungsi Reliabilitas, Distribusi dan Tingkat Risiko Weibull terhadap Waktu

Berdasarkan gambar plot di atas, untuk parameter θ dan γ konstan dapat disimpulkan bahwa untuk perubahan waktu yang semakin besar, fungsi reliabilitasnya nilainya akan semakin kecil, pada kira-kira 3,5 tahun reliabilitasnya sudah bernilai nol. Sedangkan pada fungsi distribusi dan tingkat risiko dengan bertambahnya waktu, nilainya akan semakin bertambah besar. Setelah lebih dari setengah tahun baru muncul resiko kegagalan.

$$Z(t) = \alpha\beta t^{\beta-1}, \quad t > 0,$$

Sementara aplikasi distribusi Weibull dalam teori keandalan, dapat dilihat dalam contoh berikut:

Contoh: Tunjukkanlah bahwa fungsi tingkat kegagalan diberikan oleh:

Jika dan hanya jika distribusi waktu sampai adalah distribusi Weibull

$$f(t) = \alpha\beta t^{\beta-1} e^{\alpha t\beta}, \quad t > 0,$$

Jawab: Misalkan bahwa $Z(t) = \alpha\beta t^{\beta-1}$, t > 0, maka dapat ditulis

$$f(t) = Z(t)R(t),$$

dengan

$$R(t) = ce^{-\int Z(t)dt} = ce^{-\int \alpha\beta t^{\beta-1}dt} = ce^{-\alpha t\beta}$$

Dari persyaratan bahwa R(0)=1 diperoleh c=1 jadi

R(t)= $e^{-\alpha t\beta}$

dan

$$f(t) = \alpha\beta t^{\beta-1} e^{-\alpha t\beta} \quad t > 0$$

Sekarang Z(t) menjadi tertentu bila ditulis:

$$Z(t) = \frac{f(t)}{R(t)},$$

dengan

$$R(t) = 1 - F(t) = 1 - \int_0^t \alpha\beta\chi^{\beta-1} e^{-\alpha x\beta} dx$$

$$= 1 + \int_0^t de^{-\alpha x\beta}$$

$$= e^{-\alpha t\chi}$$

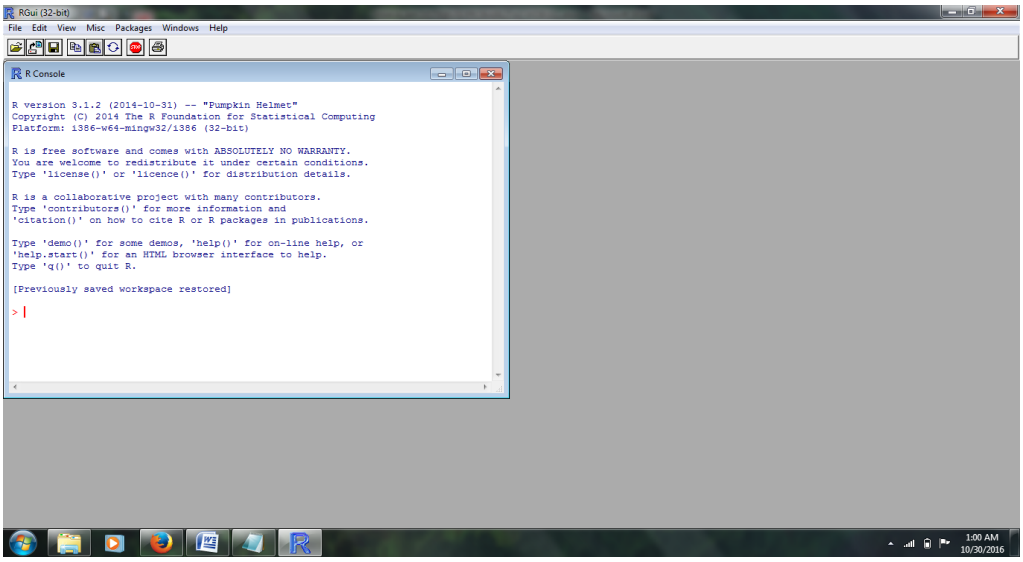
sehingga

$$Z(t) = \frac{\alpha\beta t^{\beta-1} e^{-at\beta}}{e^{-\alpha t\beta}} = \alpha\beta t^{\beta-1}, t > 0$$

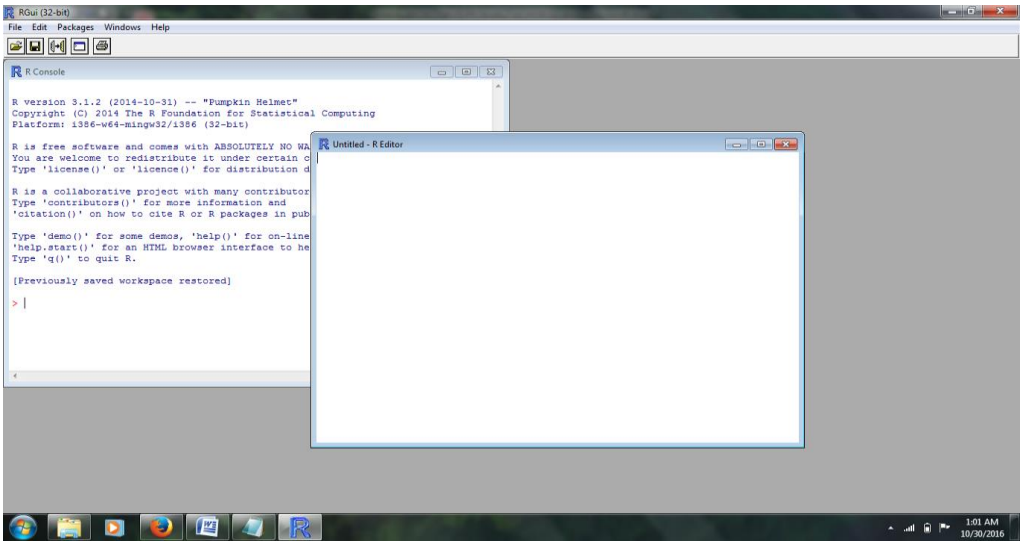
Contoh di atas, terlihat bahwa tingkat kegagalan menurun sejalan waktu bila β <1, naik sejalan waktu β >1, dan tidak berubah bila β =1. Jadi mudah terlihat bahwa untuk tingkat kegagalan yang tetap dipenuhi oleh bentuk yang lebih sederhana, yaitu distribusi eksponensial (melalui proses Poisson).

Selanjutya berikut ini disajikan contoh aplikasi sederhana probabilitas weibull melalui Program R melalui data simulasi. Adapun langkah-langkah untuk menganalisis Weibull pada program R sebagai berikut.

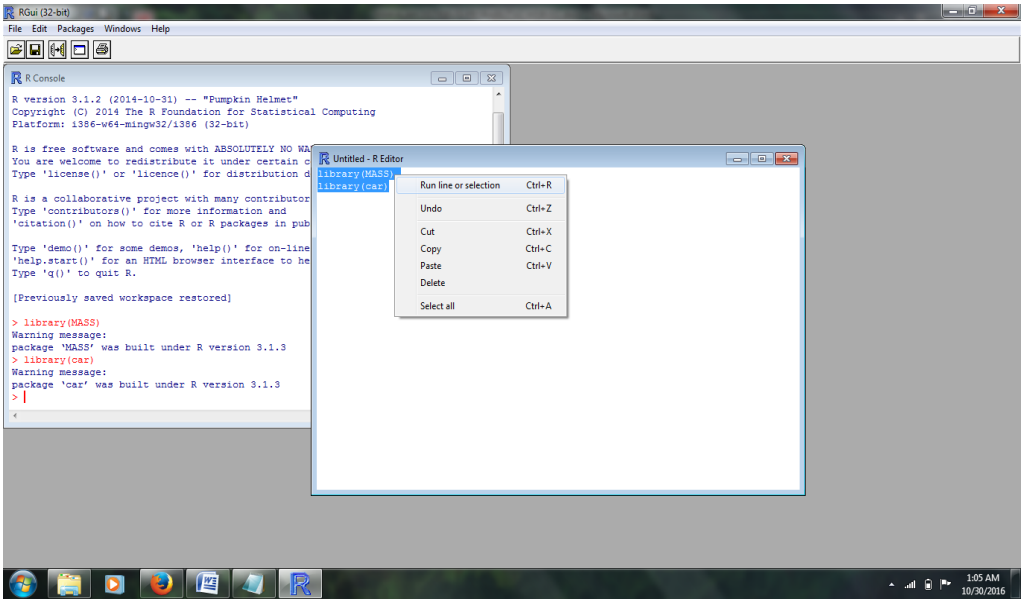
1. Buka/klik Program R pada komputer. Komputer yang digunakan harus terinstal Program R dengan package MASS dan car. Akan muncul jendela program R sebagai berikut.



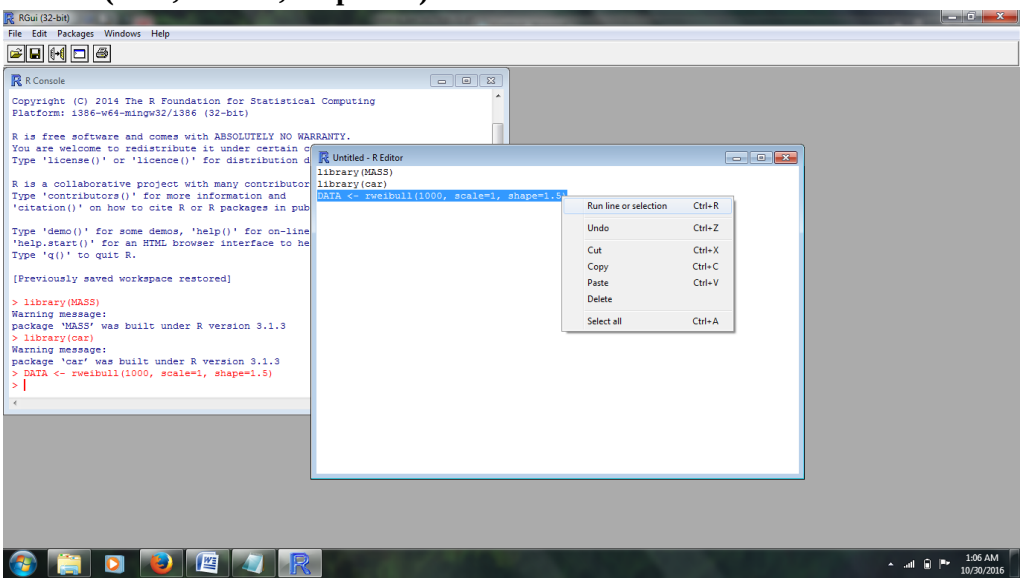
2. Pilih file – new script hingga muncul R editor. Langkah ini bertujuan untuk bekerja pada script baru.



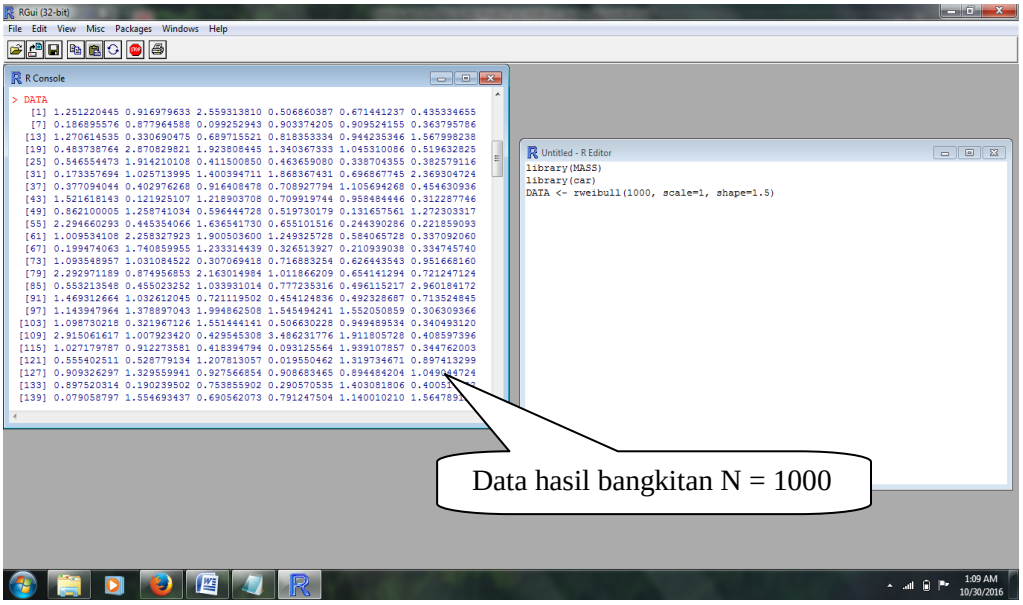
3. Jalankan (run) library MASS dan car dengan mengetikkan,
   library(MASS)
   library(car)



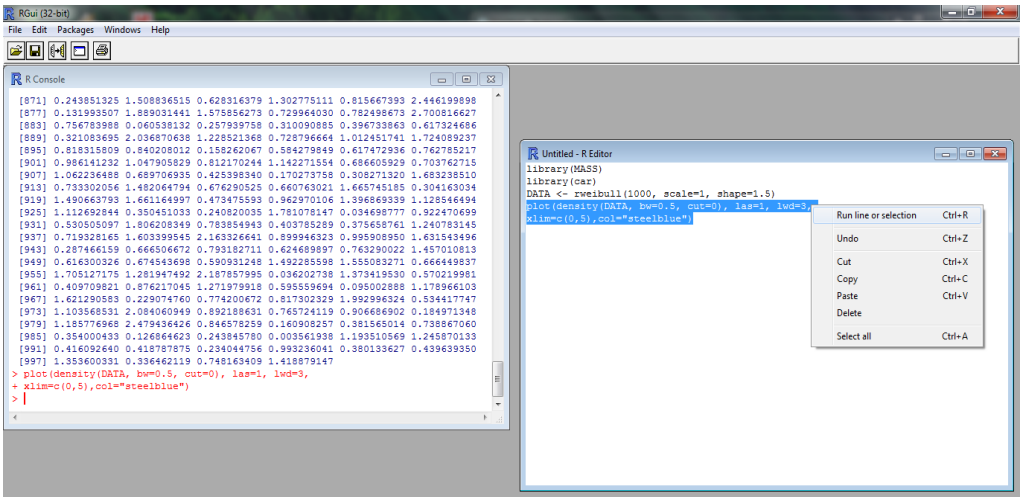
4. Input data yang akan anda analisis. Data bisa berupa file SPSS, exel, dan txt. Namun pada bahasan ini data yang digunakan adalah data simulasi dari program R. melalui kode script **DATA <- rweibull(1000, scale=1, shape=1.5)**



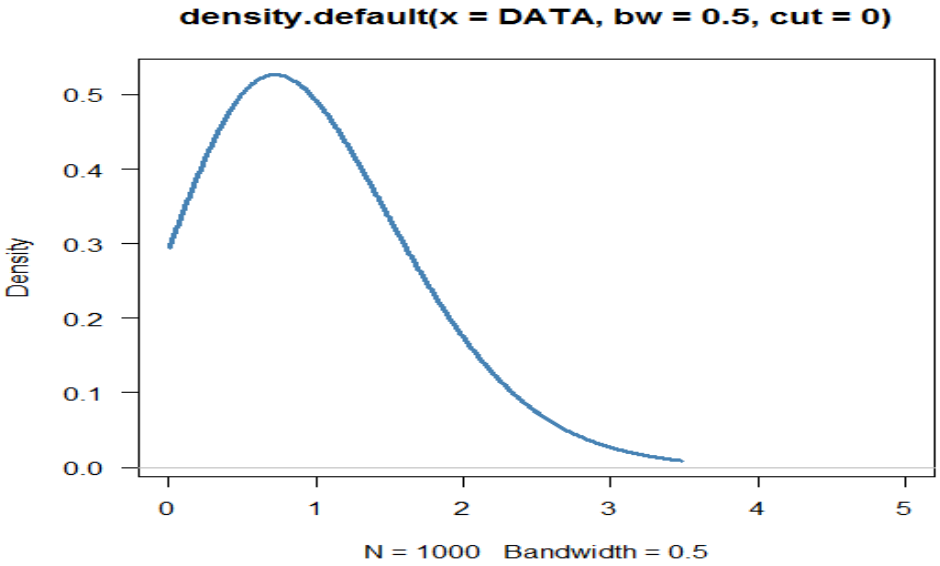
Perlu diketahui bahwa cara tersebut merupakan cara yang digunakan untuk membangkitkan data simulasi (bukan data real) dengan N = 1000 parameter skala diset = 1 dan parameter bentuk diset = 1.5. data hasil bangkitan tersebut sebagai berikut.



5. Setelah data terbaca/terinput kita dapat mulai menganalisisnya dengan menampilkan *probability density function (pdf)* melalui kode script berikut.
plot(density(DATA, bw=0.5, cut=0), las=1, lwd=3, xlim=c(0,5),col="steelblue")



6. Setelah menjalankan (run) kode tersebut maka plot hasil analisis akan muncul sebagai berikut.



Hasil tersebut menggambarkan kurva distribusi weibull untuk data simulasi dengan N = 1000.

Berdasarkan beberapa contoh aplikasi distribusi weibull di atas, dapat disimpulkan bahwa distribusi Weibull dapat dipergunakan untuk memprediksi waktu kegagalan yang sebarannya bercorak tidak linier. Dengan melakukan simulasi untuk nilai parameter bentuk tertentu, dapat dihasilkan distribusi eksponensial, Rayleigh, atau bahkan normal. Untuk niliai θ konstan, fungsi reliabilitasnya adalah makin kecil, jika nilai γ makin besar terhadap waktu. Tetapi, pada γ = 1, maka fungsi tingkat risikonya merupakan fungsi konstan. Sedangkan pada γ lebih dari 1, fungsi tingkat risikonya merupakan fungsi monoton naik dan pada γ kurang dari 1, fungsi tingkat risikonya merupakan fungsi monoton turun. Rataan waktu gagal adalah bergantung pada parameternya. Sedangkan rataan sisa umur berbanding terbalik terhadap reliabilitasnya.

G. Penutup

Berdasarkan hasil pembahasan yang telah dilakukan tentang distribusi Weibull, dapat diperoleh beberapa kesimpulan sebagai berikut.

1. Sejarah distribusi Weibull diperkenalkan oleh Fisikawan Swedia yaitu Waloddi Weibull pada tahun 1939. Distribusi Weibull selama bertahun-tahun menjadi salah satu model data statistik yang memiliki jangkauan luas dari aplikasi dalam uji hidup dan teori reliabilitas dengan kelebihan utamanya adalah

menyajikan keakuratan kegagalan dengan sampel yang sangat kecil.

2. Distribusi Weibull adalah distribusi yang memiliki peranan yang penting terutama pada persoalan keandalan (*reliability*) dan analisis rawatan (*mantainability*). Distribusi Weibull sering dipakai sebagai pendekatan untuk mengetahui karakteristik fungsi kerusakan karena perubahan nilai akan mengakibatkan distribusi Weibull mempunyai sifat tertentu ataupun ekuivalen dengan distribusi tertentu. Distribusi ini adalah distribusi serbaguna yang dapat mengambil karakteristik dari jenis lain dari distribusi, berdasarkan nilai dari bentuk parameter.
3. Rumus distribusi Weibull secara umum adalah:

$$f(x|a,b,c) = \frac{c}{a}\left(\frac{x-a}{b}\right)^{c-1} exp\left\{-\left(\frac{x-a}{b}\right)^{c}\right\}, x \geq a$$

Dimana:
a : Parameter Lokasi
b : Parameter Skala
c : Parameter Bentuk

4. Pada dasarnya distribusi Weibull dicirikan dengan ketiga parameternya yaitu parameter bentuk, parameter skala, dan parameter lokasi yang digunakan dalam menganalisis data uji hidup atau jangkauan untuk menyajikan informasi tentang keakuratan dan kemampuan untuk model berbagai tingkat kegagalan yang fleksibel.
5. Aplikasi dari distribusi probabilitas Weibull distribusi Weibull dapat dipergunakan untuk memprediksi waktu kegagalan yang sebarannya bercorak tidak linier. Dengan melakukan simulasi untuk nilai parameter bentuk tertentu, dapat dihasilkan distribusi eksponensial, Rayleigh, atau bahkan normal. Untuk niliai θ konstan, fungsi reliabilitasnya adalah makin kecil, jika nilai γ makin besar terhadap waktu. Tetapi, pada γ = 1, maka fungsi tingkat risikonya merupakan fungsi konstan. Sedangkan pada γ lebih dari 1, fungsi tingkat risikonya merupakan fungsi monoton naik dan pada γ kurang dari 1, fungsi tingkat risikonya merupakan fungsi monoton turun. Rataan waktu gagal adalah bergantung pada parameternya. Sedangkan rataan sisa umur berbanding terbalik terhadap reliabilitasnya. Distribusi probabilitas Weibull dapat diterapkan pada Program R melalui *package MASS* dan *package car*.

Berdasarkan kesimpulan yang telah dikemukakan, penulis menyarankan beberapa hal sebagai berikut.

1. Distribusi Weibull memiliki beberapa sifat terkenal antara lain fungsi distribusi kumulatif, mean, variansi serta fungsi pembangkit momen yang merupakan perkembangan dari momen. Oleh karena itu, perlu membahas lebih dalam tentang distribusi Weibull misalnya dengan membahas fungsi distribusi Weibull dengan tiga variabel atau distribusi Weibull yang dipangkatkan, dan sebagainya.
2. Penerapan distribusi Weibull menjadi sangat berguna terutama karena fleksibilitasnya mulai dari data yang sangat tidak simetris sampai data yang mendekati distribusi normal (simetris). Oleh karena itu, hendaknya perlu melakukan studi kepustakaan terhadap berbagai referensi yang berkaitan dengan distribusi weibull.

Daftar Pustaka

Bhattacharya P, Bhattacharjee R. (2010). *A study on Weibull distribution for estimating the parameters*. Journal of Applied Quantitative Methods 5(2).

Christian Walck. (2007). *Hand-book on Statistical Distributions for experimentalists*. University of Stockholm: Particle Physics Group Fysikum.

D. N. Prabhakar, Murthy, Min Xie, Renyan Jiang. (2004). *Weibull Models*. (Canada: A John Wiley & Sons, Inc., Publication.

Hazhiah, Indria T, Sugianto & Rahmawati, Rita. (2012). *Estimasi Parameter Distribusi Weibull Dua Parameter Menggunakan Metode Bayes*. Jurnal Media Statistika.

Hossain, Anwar & Zimmer, William. (2003). *Comparison of Estimation Methods for Weibull Parameters: Complete and Censored Samples*. Journal of Statistical Computation and Simulation.

Ni'ma, Roudlotin & Agoestanto, Arief. (2014). *Estimasi Bayes untuk Rata-Rata Hidup dari Distribusi Rayleigh Pada Data Disensor Tipe II*. UNNES Journal of Mathematics. pg.

Nist/Sematech. *e-Handbook of Statistical Methods*, http://www.itl.nist.gov/ div898/handbook/, date.(Links to specific pages can also be referenced this way, if suitable.)

Qiao, Hongzhi & Tsokos, Chris P. (1994). *Parameter Estimation of the Weibull Probability Distribution*. Journal Mathematics and Computers in Simulation.

Rinne, Horst. (2009). *The Weibull Distribution*: A Handbook. London: CRC Press.

Ronal E, Walpole, & Raymond H, Myers., (1995). *Ilmu Peluang Statistika Untuk Insinyur dan Ilmuwan*, Edisi ke-4, Bandung: ITB.

Salahaddin A. Ahmed. (2013). *Comparative study of four methods for estimating Weibull parameters for Halabja, Iraq* (International Journal of Physical Sciences Vol. 8(5), 9 February

Sudarno. (2009). *Karakteristik Umur Produk Pada Model Weibull*. (Media Statistika, Vol. 2, No. 2, Desember 2009.

Weibull, Waloddi. (1951). *A Statistical Distibution Function of Wide Applicability*. Joural of Applied fechanicu.

Weisser DA (2003). *Wind energy analysis of Grenada, an estimation using Weibull density function*. Renew. Energy 28.